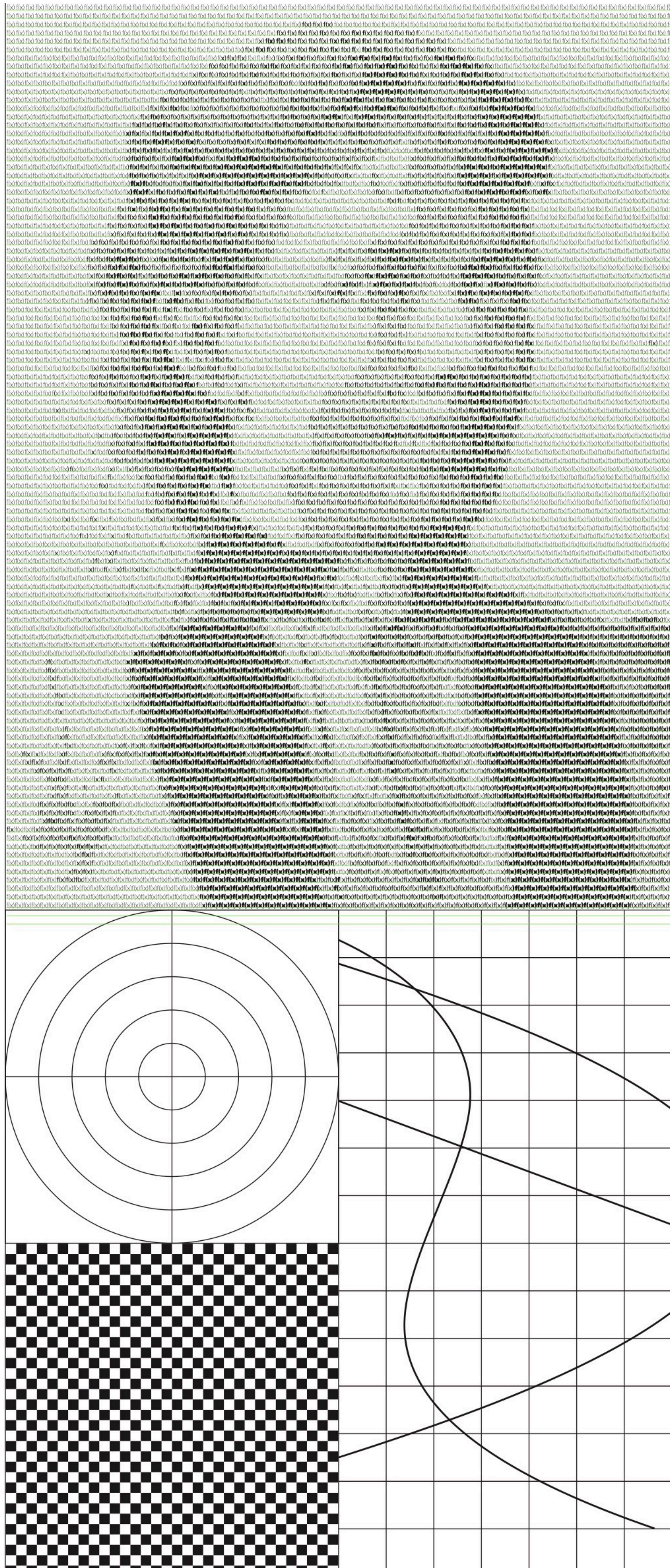
Analyse de fonctions



Exercices corrigés et commentés
Examens de Maturité Suisse
2013–2022

Bahram Zaerpour Version 1.0
Editions Swisslearn

Analyse des fonctions

Exercices corrigés et commentés
Examens de Maturité Suisse
2013–2022

Corrigés des sessions

Bahram Zaerpour

Version 1.0
Editions Swisslearn

ISBN 978–2–9701712–1–8

Malgré le soin apporté à la rédaction de ce document, il est possible qu'il contienne des erreurs. Si vous identifiez de telles erreurs, nous vous encourageons à les signaler à l'auteur :

Swisslearn
Bahram Zaerpour
Mauborget 12
1003 Lausanne
Suisse
Courriel : info@swisslearn.org

Les énoncés des problèmes traités dans ce document sont extraits des Examens de Maturité Suisse et ne sont pas la propriété de l'auteur. Les corrections proposées ne sont pas des corrigés officiels des Examens de Maturité.

Analyse des fonctions en un clin d'œil
Version pour tablettes et ordinateurs
https://www.swisslearn.org/maps2/map.php?id=3

Session été 2013, problème 1

On considère la fonction f donnée par $f(x) = x^2 \cdot e^x$

a) **Déterminer l'ensemble de définition, les zéros, le signe de f, les équations des éventuelles asymptotes et les coordonnées des points à tangente horizontale de la fonction f.**

b) **Représenter le graphe de f.**

c) **Dans le même système d'axes que le graphe de f, représenter le graphe de $g(x) = e^x$ puis calculer les coordonnées des points d'intersection des graphes de f et de g.**

d) **Vérifier que $F(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right) \cdot e^x$ est une primitive de f, puis calculer l'aire de la surface fermée comprise entre les graphes de f et g.**

On considère la fonction f_a donnée par $f_a(x) = \left(x^2 + a\right) \cdot$

e) **Pour quelle(s) valeur(s) de a le graphe de f_a passe-t-il par le point A(1;1) ?**

f) **Pour quelle(s) valeur(s) de a le graphe de f_a possède-t-il un seul point à tangente horizontale ? Donner alors l'équation de cette(ces) tangente(s).**

On considère la fonction *f* donnée par $f(x) = x^2 \cdot e^x$

a) Déterminer l'ensemble de définition, les zéros, le signe de *f*, les équations des éventuelles asymptotes et les coordonnées des points à tangente horizontale de la fonction *f*.

Ensemble de définition d'une fonction

L'ensemble de définition d'une fonction f, noté D_f, désigne l'ensemble des nombres pour lesquels la fonction prend une valeur réelle :

$$f(a) \in \mathbb{R} \Rightarrow a \in D_f$$

En revanche, les valeurs interdites, notées v_i, représentent les nombres qui n'ont pas une image réelle. En d'autres termes, on peut affirmer que l'ensemble de définition d'une fonction englobe l'ensemble des nombres réels, à l'exception des valeurs interdites :

$$D_f = \mathbb{R} \backslash \{v_i\}$$

La fonction étudiée ici ne présente aucune variable au dénominateur, sous une racine carrée, dans un logarithme, ni au sein d'une expression avec une tangente. Par conséquent, il n'y a aucune valeur interdite et l'ensemble de définition de cette fonction c'est l'ensemble des réels.

Retenez que l''exponentielle d'un nombre réel est toujours un nombre réel :

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x \in \mathbb{R}$$

Une asymptote verticale (ASV) correspond à une valeur interdite. En l'absence de valeur interdite, c'est-à-dire lorsque le domaine de définition englobe l'ensemble des nombres réels, la fonction ne possède pas d'ASV.

Une asymptote horizontale (ASH) indique la valeur vers laquelle tend la fonction lorsque x s'approche de l'infini positif (à droite) ou de l'infini négatif (à gauche). Autrement dit, si la limite de la fonction lorsque x tend vers l'infini est un nombre réel, alors ce nombre représente une ASH :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \Rightarrow ASH\colon y = a$$

Limites des fonctions exponentielles

Notez que $e^{+\infty} = +\infty$ et $e^{-\infty} = 0$. Il faut donc chercher les limites vers plus et moins infini séparément. Notez aussi que $\infty \cdot 0$ est indéterminé. Pour enlever l'indétermination, retenez que l'exponentielle l'emporte sur x^2.

$$\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^x = n \cdot 0 = 0$$

Ensemble de définition

$D_f = \mathbb{R}$

Zéros

$x^2 \cdot e^x = 0$

$\Rightarrow x^2 = 0 \;\Rightarrow x = 0$v

$\Rightarrow e^x = 0 \;\Rightarrow x = \emptyset \quad (e^{-\infty} = 0)$

Signes

x		0	
x^2	+	0	+
e^x	+	+	+
$f(x)$	+	0	+

Asymptotes verticales

$Def = \mathbb{R} \;\Rightarrow$ Pas d'asymptotes verticales

Asymptote horizontale

$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ Pas d'asymptote horizontale à droite

$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = 0$

$\Rightarrow$ Asymptote horizontale à gauche,

ASHG : $y = 0$

Points à tangente horizontale

$f'(x) = 2x \cdot +e^x \cdot x^2 = xe^x(2+x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow xe^x(2+x) = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$

Tableau de croissance

x		-2		0	
f'(x)	+	0	–	0	+
f(x)	↗	max	↘	min	↗

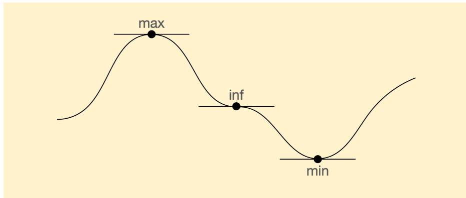
$x_1 = 0 \Rightarrow \quad y_1 = f(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$

Maxima $(-2\,;\,\frac{4}{e^2})$

$x_2 = -2 \Rightarrow \quad y_2 = f(-2) = (-2)^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$

Minima (0 ; 0)

Les points ayant une tangente horizontale sont les extrema ainsi que certains points d'inflexion. Les abscisses de ces points sont les zéros de la dérivée.



Dérivée d'un produit peut être calculé par la formule suivante :

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

Dérivée d'un produit

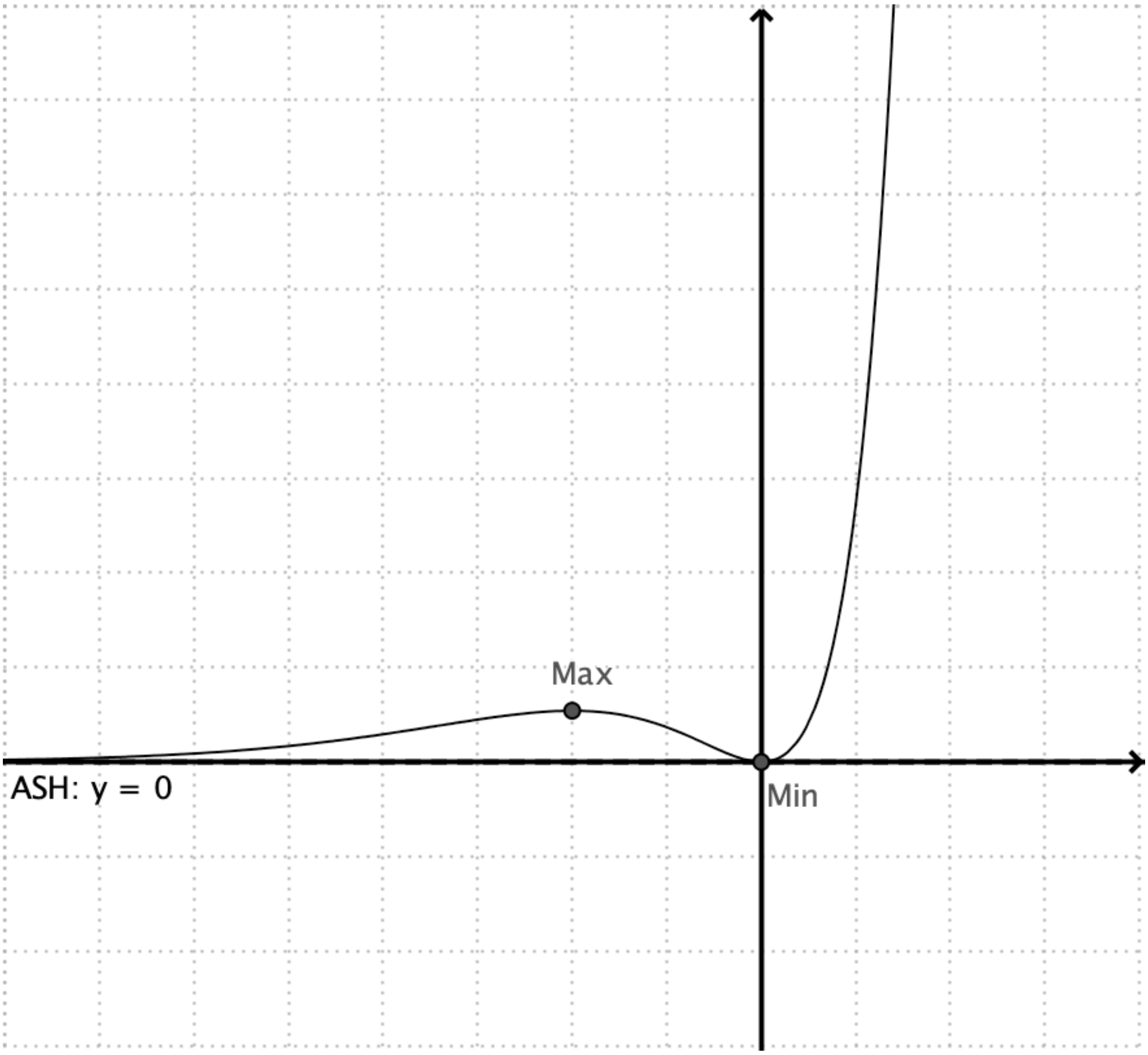
L'exponentielle ex est sa propre dérivée :

$$(e^x)' = e^x$$

Les zéros de la dérivée correspondent aux abscisses des points où la fonction présente des tangentes horizontales, c'est-à-dire les maxima et les minima. Pour déterminer les coordonnées de ces points, on peut utiliser l'expression de la fonction :

$$P(x_0; y_0) \in f(x) \Rightarrow y_0 = f(x_0)$$

b) Représenter le graphe de *f*.



c) Dans le même système d'axes que le graphe de *f*, représenter le graphe de *g(x) = e^x^* puis calculer les coordonnées des points d'intersection des graphes de *f* et de *g*.

Les abscisses des points d'intersection de deux fonctions sont les solutions de l'équation obtenue en égalant les deux fonctions :

$$f(x) = g(x)$$

Les ordonnées de ces points sont les images des abscisses à trave l'une ou l'autre fonction :

A savoir :

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

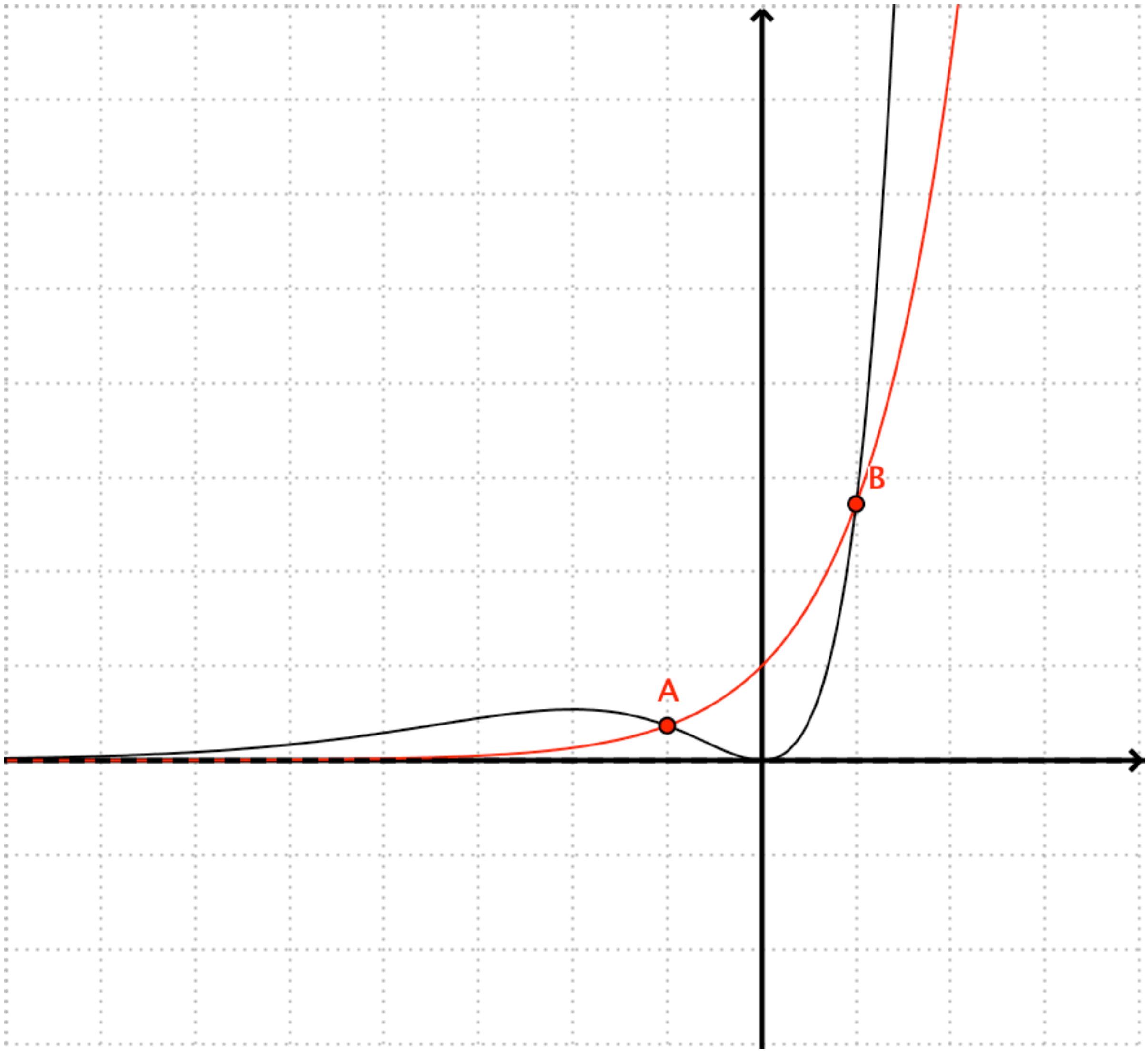
Intersection des deux fonctions

$x^2 \cdot e^x = e^x \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = g(1) = e^1 = e \approx 2{,}7$

$x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = g(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$

Deux points d'intersection : A(1 ; e)   B(-1 ; 1/e)



d) Vérifier que $F(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$ est une primitive de f, puis calculer l'aire de la surface fermée comprise entre les graphes de f et g.

Si $F(x)$ est la primitive de $f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = (2x - 2) \cdot e^x + (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$$

$$F'(x) = e^x(2x - 2 + x^2 - 2x + 2)$$

$$F'(x) = x^2 \cdot e^x = f(x) \ \checkmark$$

Pour prouver que la fonction F(x) est la primitive de f(x) il suffit de montrer que la dérivée de F(x) est égale à f(x) :

$F(x) = primitive\ de\ f(x)$

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$

Primitive d'une fonction

La dérivée d'un produit est déterminée par la formule suivante :

$(u \cdot v)' = u'v + uv'$

L'aire comprise entre le graphe de deux fonctions est égale à l'aire entre la courbe le plus haut (ici g) et l'axe des abscisses moins l'aire entre le graphe le plus bas (ici f) et l'axe des abscisses.

L'aire entre la courbe d'une fonction et l'axe des abscisses entre deux points d'abscisses a et b peut être calculé grâce à une primitive de la fonction :

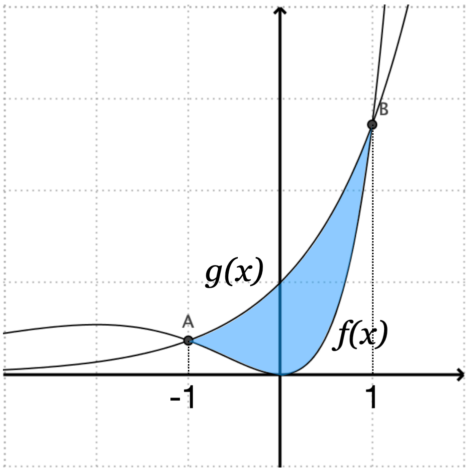
$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

Ici a et b sont les abscisses des points d'intersection entre f et g (voir point c).

Rappel - la primitive de e^x c'est e^x :

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$$

Aire de la surface fermée comprise entre les graphes de *f* et *g* = aire sous *g* – aire sous *f*) :



$G(x) = e^x$

$F(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$

Aire sous *g* = $\int_{-1}^{1} g(x) \cdot dx = G(1) - G(-1) = e - e^{-1}$

Aire sous *f* = $\int_{-1}^{1} f(x) \cdot dx = F(1) - F(-1)$

$= [(1^2 - 2 \cdot 1 + 2) \cdot e^1] - [((-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 2) \cdot e^{-1}]$

$= e - 5e^{-1}$

Aire entre *f* et *g* = aire sous *g* – aire sous *f*)

$= (e - e^{-1}) - (e - 5e^{-1})$

$= e - e^{-1} - e + 5e^{-1} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$ $unités^2$

On considère la fonction f_a donnée par $f_a(x) = (x^2 + a) \cdot e^x$

e) **Pour quelle(s) valeur(s) de a le graphe de f_a passe-t-il par le point A(1;1) ?**

L'ordonnée d'un point $P(x_P ; y_P)$ qui se trouve sur le graphe d'une fonction f est égale à l'image de l'abscisse à travers la fonction :

$$P(x_P; y_P) \in f(x) \Rightarrow y_P = f(x_P)$$

$A \in f_a \Rightarrow f_a(x_A) = y_A$

$\Rightarrow (1^2 + a) \cdot e^1 = 1 \Rightarrow e + a \cdot e = 1 \Rightarrow a.e = 1 - e$

$\Rightarrow a = \frac{1-e}{e} \approx -0{,}63$

Vérification : $A \in f_a \Rightarrow f_a(x_A) = y_A$

$\Rightarrow f_a(1) = 1$

$\Rightarrow \left(1^2 + \frac{1-e}{e}\right).e^1 = 1$

$\Rightarrow \left(e + \frac{e-e^2}{e}\right).e^1 = e + 1 - e = 1$ ✓

f) Pour quelle(s) valeur(s) de a le graphe de f_a possède-t-il un seul point à tangente horizontale ? Donner alors l'équation de cette(ces) tangente(s).

Valeur(s) de a : tangente horizontale = tangente dont la pente = 0 :

$f_a(x) = (x^2 + a) \cdot e^x$

$f_a'(x) = 2x \cdot e^x + e^x . (x^2 + a) = e^x(x^2 + 2x + a)$

$f_a{}'(x) = 0 \Rightarrow e^x(x^2 + 2x + a) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x + a = 0$

Un seul point à tangente horizontale

$\Rightarrow$ un seul zéro pour la dérivée

$\Rightarrow$ le discriminant de $x^2 + 2x + a$ doit être nul :

$\Delta = 2^2 - 4.1.a = 0 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$

a $= 1 \Rightarrow f_a(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$

$\Rightarrow f_a{}'(x) = e^x(x^2 + 2x + 1)$

Équation de cette tangente

Pente des tangentes horizontales = zéros de la dérivée :

$f_a'(x) = 0 \Rightarrow e^x(x^2 + 2x + 1) = 0$

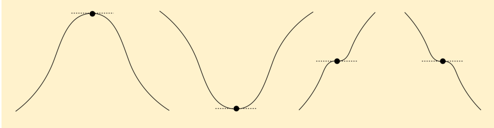
$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4.1.1 = 0$

$x = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow y = f_a(-1) = ((-1)^2 + 1) \cdot e^{-1} = \frac{2}{e} \cong 0{,}74$

L'équation de la tangente horizontale : $y = \frac{2}{e}$

Les points à tangentes horizontales sont les points du graphe où la pente de la tangente est égale à zéro.
Ils correspondent aux extrema (minima et maxima) de la fonction et à certains points d'inflexion :



Les abscisses des points à tangente horizontale correspondent aux zéros de la dérivée.

Rappel - la dérivée d'un produit peut être déterminée par la formule suivante :

$(u \cdot v)' = u'v + uv'$

Dérivée d'un produit

L'équation d'une droite tangente au graphe d'une fonction est de type $y = mx + h$. Une droite horizontale a une pente m = 0. Ainsi l'équation d'une droite horizontale est de type y = h.
L'ordonnée à l'origine h d'une droite horizontale est égale à l'ordonnée de n'importe quel point qui se trouve sur cette droite :

Tangente en $x = a$: y = mx + h

$m = f'(a)$

$T(a; f(a))$

$y_T = mx_T + h$