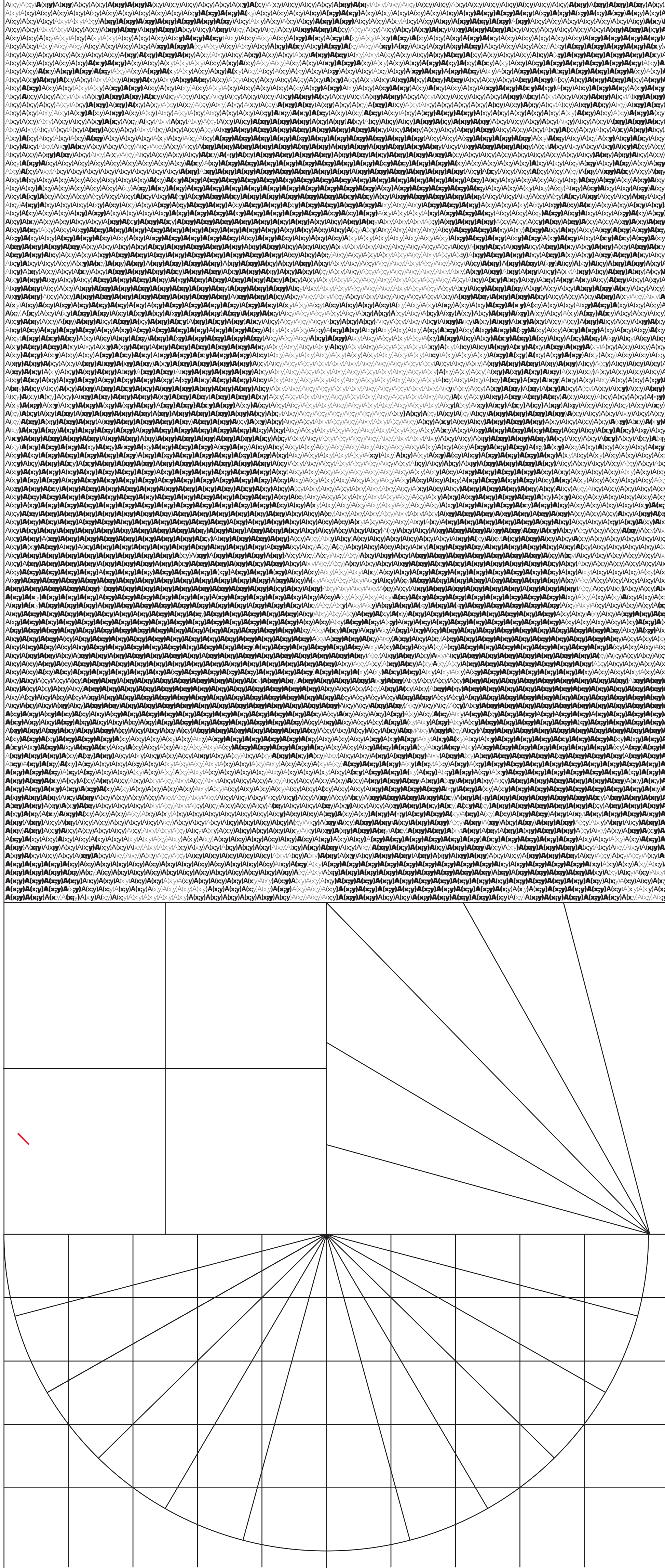
Géométrie Analytique



Exercices corrigés et commentés
Examens de Maturité Suisse
2013–2022

Bahram Zaerpour
Version 1.0
Editions Swisslearn

Géométrie Analytique

Exercices corrigés et commentés
Examens de Maturité Suisse
2013–2022

Corrigés des sessions

Bahram Zaerpour
Version 1.0
Editions Swisslearn

ISBN 978–2–9701712–0–1

Malgré le soin apporté à la rédaction de ce document, il est possible qu'il contienne des erreurs. Si vous identifiez de telles erreurs, nous vous encourageons à les signaler à l'auteur :

Swisslearn
Bahram Zaerpour
Mauborget 12
1003 Lausanne
Suisse
Courriel : info@swisslearn.org

Les énoncés des problèmes traités dans ce document sont extraits des Examens de Maturité Suisse et ne sont pas la propriété de l'auteur. Les corrections proposées ne sont pas des corrigés officiels des Examens de Maturité.

Géométrie analytique en un clin d'œil
Version pour tablettes et ordinateurs
https://www.swisslearn.org/maps2/map.php?id=2

Session été 2016, problème 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points A(2 ; 3), B(-1 ; 2) et E(4 ; - 3).

a) **Montrer que le triangle ABE est rectangle en A.**

b) **Déterminer une équation du cercle c, circonscrit au triangle ABE.**

c) **Donner une équation cartésienne de la droite d passant par les points B et E.**

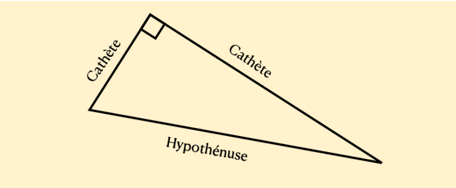
d) **La droite p, perpendiculaire à la droite d et passant par le point A, coupe d en H et coupe une seconde fois le cercle c en A'.**

- **Écrire une équation cartésienne de la droite p.**
- **Déterminer les coordonnées du point H.**
- **Déterminer les coordonnées du point A'.**

A(2 ; 3),B (-1 ; 2), E(4 ; - 3)

a) Montrer que le triangle ABE est rectangle en A.

Un triangle est rectangle si un de ses angles est un angle droit (angle de 90°).
On nomme hypoténuse le côté du triangle qui est en face de l'angle droit et cathètes les deux autres côtés, adjacents à l'angle droit :



Produit scalaire de deux vecteurs

Condition de normalité de deux vecteurs : le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est égal à zéro :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Produit scalaire de deux vecteurs :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a + y_b$$

Si deux segments de droites sont perpendiculaires alors leurs pentes sont l'inverse-opposée l'une de l'autre :

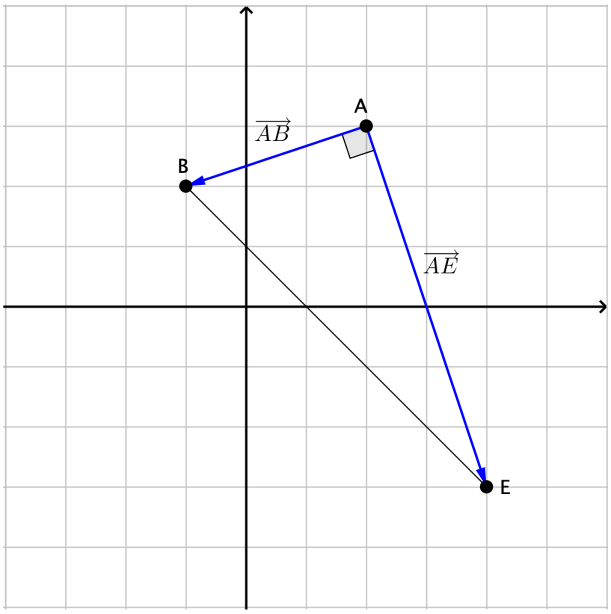
$$d_1 \perp d_2 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Pente d'un segment de droite

Pente d'un segment de droite AB :

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Méthode 1 : produit scalaire de deux vecteurs



$$\widehat{BAE} = 90° \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$$

$$\overrightarrow{AB}\binom{-1-2}{2-3} = \binom{-3}{-1} \qquad \overrightarrow{AE}\binom{4-2}{-3-3} = \binom{2}{-6}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = -3 \cdot 2 + (-1)(-6) = -6 + 6 = 0 \checkmark$$

Méthode 2 : pentes des droites

$$\widehat{BAE} = 90° \Rightarrow m_{AB} = -\frac{1}{m_{AE}}$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-3}{-1-2} = -\frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$m_{AE} = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{-3-3}{4-2} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$\frac{1}{3} = -\frac{1}{-3} \checkmark$$

Méthode 3 : théorème de Pythagore

$\widehat{BAE} = 90° \Rightarrow AB^2 + AE^2 = BE^2$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$= \sqrt{(-1-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$

$AE = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2}$

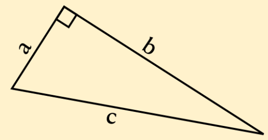
$= \sqrt{(4-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{40}$

$AE = \sqrt{(x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2}$

$= \sqrt{(4+1)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{50}$

$AB^2 + AE^2 = BE^2 \Rightarrow 10 + 40 = 50 \Rightarrow 50 = 50$ ✓

Théorème de Pythagore : dans un triangle rectangle, la somme des carrés des cathètes (a et b) est égale au carré de l'hypoténuse (c) :



$a^2 + b^2 = c^2$

On peut calculer la longueur d'un segment de droite AB avec la formule suivante :

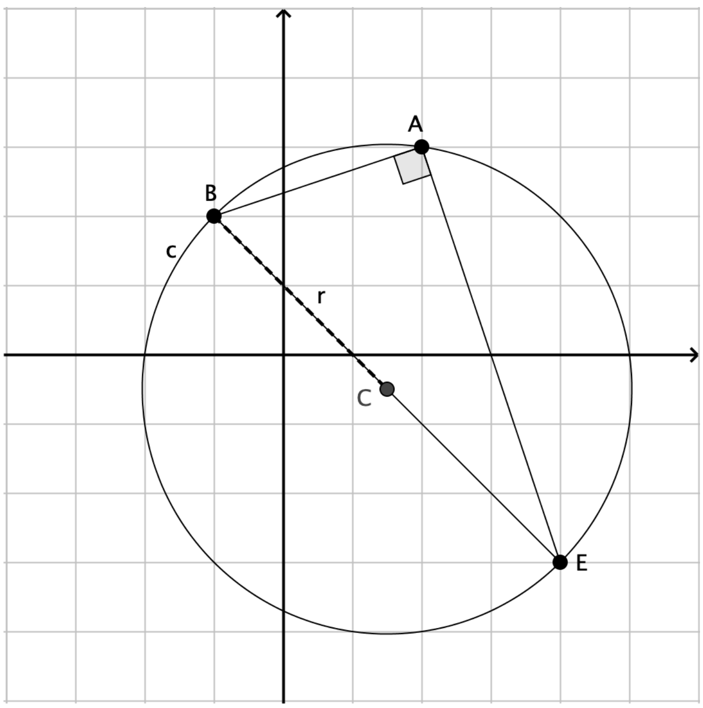
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Longueur d'un segment de droite

A savoir :

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

b) Déterminer une équation du cercle c, circonscrit au triangle ABE.



Centre du cercle = milieu de l'hypoténuse BE :

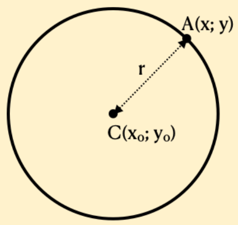
$C\left(\frac{x_E+x_B}{2}; \frac{y_E+y_B}{2}\right) = \left(\frac{4-1}{2}; \frac{-3+2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\ ; -\frac{1}{2}\right)$

Rayon du cercle = BC

$r = BC = \sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}-2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2}$

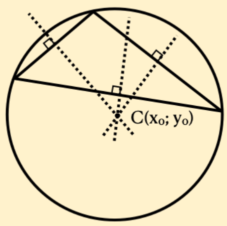
$= \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$

Pour donner l'équation d'un cercle il faut déterminer les coordonnées de son centre (x_0 et y_0) et la longueur de son rayon (r) :



$c: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Le centre d'un cercle circonscrit à un triangle se trouve à l'intersection des médiatrices du triangle.



Cas particulier : Dans un triangle rectangle, l'intersection des médiatrices se trouve au milieu de l'hypoténuse.

Coordonnées M, milieu d'un segment AB :

$M\left(\frac{x_B+x_A}{2}; \frac{y_B+y_A}{2}\right)$

A savoir :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$c: \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

$\Rightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{25}{2} = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 3x + y + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} - \frac{25}{2} = 0$

$c: x^2 + y^2 - 3x + y + 10 = 0$

c) Donner une équation cartésienne de la droite *d* passant par les points B et E.

L'équation réduite d'une droite :

$$y = mx + h$$

Équation d'une droite passant par deux points

Pour donner l'équation d'une droite il faut déterminer sa pente m et son ordonnée à l'origine h. La pente d'une droite passant par deux points A et B peut être calculée avec les coordonnées de ces deux points :

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

L'ordonnée à l'origine h d'une droite dont on connaît la pente m peut être calculée grâce aux coordonnées d'un point appartenant à la droite :

$$P(x_P; y_P) \in d: y = mx + h \Rightarrow$$
$$y_P = mx_P + h \Rightarrow h = y_P - mx_P$$

Droites : transformer l'équation réduite en cartésienne

Pour obtenir l'équation cartésienne de la droite, il faut mettre tous les termes à gauche de l'équation et éviter les coefficients rationnels :

$$ax + by + c = 0$$

B (-1 ; 2) E (4 ; - 3)

$d: y = mx + h$

$m = \frac{y_B - y_E}{x_B - x_E} = \frac{2+3}{-1-4} = \frac{5}{-5} = -1$

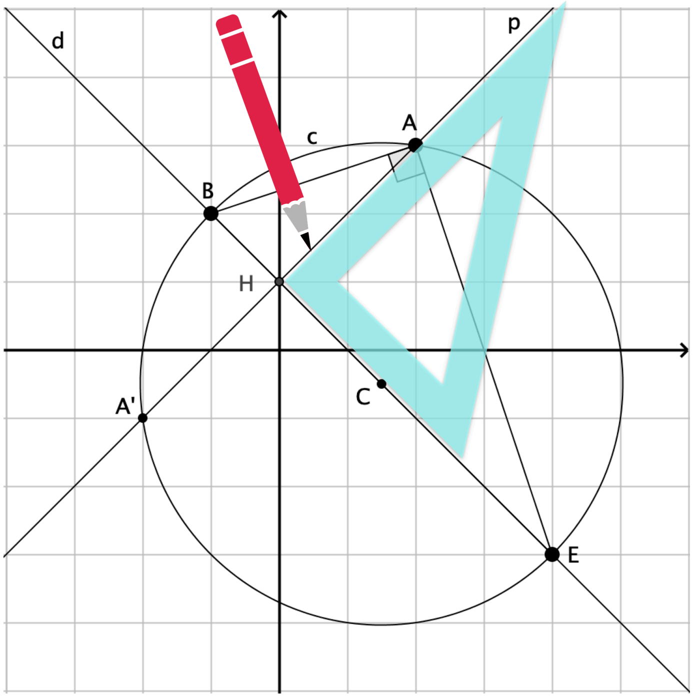
$y = -x + h$

$B \in d \Rightarrow 2 = -(-1) + h \Rightarrow h = 1$

$d: y = -x + 1 \Rightarrow d: x + y - 1 = 0$

d) La droite p, perpendiculaire à la droite d et passant par le point A, coupe d en H et coupe une seconde fois le cercle c en A'.

- **Écrire une équation cartésienne de la droite p.**



$p \perp d \Rightarrow m = -\frac{1}{m_d} = 1$

$y = x + h$

$A \in p \Rightarrow 3 = 2 + h \Rightarrow h = 1$

$p : y = x + 1 \Rightarrow x - y + 1 = 0$

Avec une équerre on peut dessiner la droite p, parallèle à d et passant par A.
L'intersection de p avec la droite d donne la position du point H et l'intersection avec le cercle c donne la position de A'.

La pente m de la droite p semble être de 1 et son ordonnée à l'origine h de 1. En se basant sur le graphique son équation est $y = x + 1$.

Donner l'équation d'une droite d'après sa tracée sur un repère.

Les coordonnées des points H et A' d'après le schéma : H(0 ; 1) A'(−2 ;−1)

Il faut maintenant obtenir ces données par calcul.

La droite p est perpendiculaire à d. Sa pente est donc l'inverse-opposée de la pente de d :

$$p \perp d \Rightarrow m_p = -\frac{1}{m_d}$$

Équation d'une droite perpendiculaire à une autre droite

Le point A est sur la droite p. Ses coordonnées permettent de calculer l'ordonnée à l'origine de p :

$$A \in P: y = mx + h$$
$$\Rightarrow y_P = mx_P + h \Rightarrow h = y_P - mx_P$$

- **Déterminer les coordonnées du point H.**

$p: y = x + 1 \quad d: y = -x + 1$

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \quad +$$

$\Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow 1 = x + 1 \Rightarrow x = 0$

$H(0; 1)$

Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de deux droites, il faut résoudre le système d'équations composé des équations des deux droites.

Intersection de deux droites

- **Déterminer les coordonnées du point A'.**

Intersection d'une droite avec un cercle

Les coordonnées des points d'intersection d'une droite et d'un cercle sont les solutions du système d'équations composé des équations de l droite et du cercle.
En substituant y dans l'équation du cercle par son équivalent dans l'équation de la droite (x + 1) on obtient une équation à une inconnue de second degré.

Résoudre une équation de second degré

Les solutions de cette équation sont les abscisses des deux points d'intersection entre la droite et le cercle :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta})}{2a}$$

Les ordonnées de ces deux points sont calculées en utilisant l'équation de la droite :

$$A \in d \Rightarrow y_A = mx_A + h$$

$c: x^2 + y^2 - 3x + y - 10 = 0 \quad p: y = x + 1$

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + y - 10 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2 + (x+1)^2 - 3x + x + 1 - 10 = 0$

$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 - 2x - 9 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 8 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 4$

$x_1 = -2 \Rightarrow y = -2 + 1 = -1 \quad A'(-2;\ -1)$

$x_2 = 2 \Rightarrow y = 2 + 1 = 3 \ \ A(2;3)$ (Point déjà connu)